IFT6370 Informatique Théorique – Théorème du Speed-Up

Tom Sarry
<tom.sarry@umontreal.ca>

Novembre 2022

Le théorème présenté s'intitule *Blum's Speed-Up Theorem* et fut publié par Manuel Blum en 1967 [1]. La motivation principale est la suivante: *Étant donné une fonction f et un programme la calculant, existe-t-il un programme plus rapide pour f ?* Les contributions apportées par ce papier sont donc décrites par l'auteur comme la preuve de l'éxistence de deux fonctions:

- Une qui a la propriété que pour n'importe quel programme la calculant, il existera un programme beaucoup plus rapide pour calculer cette fonction.
- Une seconde qui est extrêmement longue à calculer et possède un programme *assez rapide*, tel que n'importe quel autre programme efficace prendra environ le même temps de calcul.

Les fonctions mentionnées ci-dessus sont des cas particuliers du théorème du Speed-Up et de sa réciproque, le théorème de la Compression. Nous présenterons donc intuitivement un exemple d'une telle fonction pour le premier cas et prouverons cette existence, qui peut être complexe à imaginer aux premiers abords.

La puissance de ce théorème provient de plus de par sa généralité. En effet, cette théorie de complexité est indépendente de toute machine calculant ces fonctions – elle est donc valide pour des Machines de Turing à alphabet binaire ou en base 10 ainsi que tous leurs modèles de calculs équivalents: programmes en language C, python...

Nous nous baserons sur la preuve simplifiée de Young [2], reprise dans le manuel de cours de Cutland [3], néanmoins jugée par ce dernier comme *probablement la plus complexe de ce livre.*

References

[1] M. Blum, "A machine-independent theory of the complexity of recursive functions," *J. ACM*, vol. 14, no. 2, 322–336, 1967, ISSN: 0004-5411. DOI: `10.1145/321386.321395`. [Online]. Available: `https://doi.org/10.1145/321386.321395`.

[2] P. Young, "Easy constructions in complexity theory: Gap and speedup theorems," *Proc. AMS*, vol. 37, 1973. DOI: `10.1090/S0002-9939-1973-0312768-7`. [Online]. Available: `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0312768-7`.

[3] N. Cutland, *Computability: An Introduction to Recursive Function Theory.* Cambridge University Press, 1980. DOI: `10.1017/CBO9781139171496`.